# § 线性方程组解集的结构

**定理:** $A\in F^{m\times n}$ $\vec{b}\in F^{m}$ 则

1) $A x=\vec{b}$ 有解 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A,b)$

2) $A x=\vec{b}$ 有唯一解 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A,b)=n$

**例:** $\forall A\in F^{m\times n} \Rightarrow Ax=0$ 一定有解

有非零解 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A)<n \overset{A\text{为方阵}}{\Longleftrightarrow} \det(A)=0$ (解空间大小?)

$V:=\{x\in F^{n} \mid Ax=0\}$ $\longleftarrow$ $Ax=0$ 的**解空间**

解空间的一组基 称为一个**基础解系**

**定理:** $V$ 为 $F^{n}$ 的 $n-\operatorname{rank}(A)$ 维子空间.

证. 设 $\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}$ 为 $A$ 的相抵标准型 $A=P\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}Q$.

$$W:=\left\{y\in F^{n} \,\middle|\, \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix} y=0\right\}=\langle \vec{e}_{r+1},\cdots,\vec{e}_{n}\rangle$$

$x\in V \Leftrightarrow Ax=0 \Leftrightarrow P\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}Qx=0 \Leftrightarrow Qx\in W$

$\Leftrightarrow Qx=t_1\vec{e}_{r+1}+t_2\vec{e}_{r+2}+\cdots+t_{n-r}\vec{e}_{n}$ for some $t_1,\cdots,t_{n-r}$

$\Leftrightarrow x=t_1\vec{\eta}_{r+1}+t_2\vec{\eta}_{r+1}+\cdots+t_{n-r}\vec{\eta}_{n}$ (其中 $\vec{\eta}_i:=Q^{-1}\vec{e}_i$)

$\Rightarrow V=\langle \vec{\eta}_{r+1},\vec{\eta}_{r+2},\cdots,\vec{\eta}_{n}\rangle$

下证 $\vec{\eta}_{r+1},\cdots,\vec{\eta}_{n}$ 线性无关. 若 $\sum_{i=r+1}^{n} a_i\vec{\eta}_i=0$, 则

$$0=Q\left(\sum_{i=r+1}^{n} a_i\vec{\eta}_i\right)=\sum_{i=r+1}^{n} a_i Q\vec{\eta}_i=\sum_{i=r+1}^{n} a_i\vec{e}_i$$

$\Rightarrow a_{r+1}=a_{r+2}=\cdots=a_n=0 \Rightarrow \vec{\eta}_{r+1},\cdots,\vec{\eta}_{n}$ 线性无关. $\square$

非齐次方程组?

$$W := \{ x \in F^n \mid Ax = b \} \qquad ( V := \{ x \in F^n \mid Ax = 0 \} )$$

W与V有什么关系?

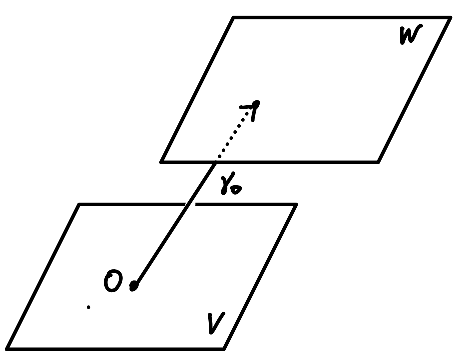
- $\alpha, \beta \in W \Rightarrow \alpha - \beta \in V$
- $\alpha \in W,\ \gamma \in V \Rightarrow \alpha + \gamma \in W$

定理: 若W非空, 任取 $\gamma_0 \in W$. 则

$$W = \gamma_0 + V := \{ \gamma_0 + \alpha \mid \alpha \in V \}$$

证: "$\supseteq$" $\forall \alpha \in V \Rightarrow \gamma_0 + \alpha \in W$

"$\subseteq$" $\forall \omega \in W \Rightarrow \omega - \gamma_0 \in V \Rightarrow \omega \in \gamma_0 + V$



# 一般线性空间

n维数组空间 = 赋予了加法和数乘运算的n维数组向量的集合.

对于一个集合 能否定义 + · 满足类似的性质与结构?

例 $E_n := \{ a_1x_1+\cdots+a_nx_n=b \mid a_i, b\in F\}$

· $(a_1x_1+\cdots+a_nx_n=b) \oplus (a_1'x_1+\cdots+a_n'x_n=b')$

$$:= ((a_1+a_1')x_1+\cdots+(a_n+a_n')x_n=(b+b'))$$

· $\lambda\circ(a_1x_1+\cdots+a_nx_n=b) = ((\lambda a_1)x_1+\cdots+(\lambda a_n)x_n=(\lambda b))$

⇒ 方程组的 线性组合, 线性相关, 线性无关, 极大无关组, 秩

等价的独立方程组

独立方程个数

例 $F_n[x] := \{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \mid a_i\in F\}$

· $(a_0+\cdots a_nx^n)+(b_0+\cdots+b_nx^n) := (a_0+b_0)+\cdots+(a_n+b_n)x^n$

· $\lambda(a_0+\cdots+a_nx^n) := \lambda a_0+\cdots+\lambda a_n\cdot x^n$

⇒ 多项式的 线性相关, 线性无关, 极大无关组, 秩, 基

$x^2+1, x^2, 1$ 线性相关, $1,x,\dots,x^n$ 为一组基.

例：$F^{m\times n}$ 矩阵的加法和数乘

⇒ 矩阵的线性相关，线性无关，极大无关组，秩，基

$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 构成 $F^{2\times 2}$ 的一组基.

数组空间 $\xrightarrow{\text{推广}}$ 一般的线性空间.

定义：$V\neq\phi$，$F$ 为数域. $V$ 上有两种运算

(1) 加法：$\forall$ $V$ 中的有序对 $(\alpha,\beta)$，$\exists$ 唯一 $\gamma\in V$ 与之对应. 记为 $\alpha+\beta=\gamma$

$$V\times V \longrightarrow V \qquad (\alpha,\beta)\longmapsto \alpha+\beta$$

(2) 数乘：$\forall\ \lambda\in F$，$\forall\alpha\in V$ $\exists$ 唯一 $\gamma$ 与之对应. 记为 $\lambda\alpha=\gamma$.

$$F\times V \longrightarrow V \qquad (\lambda,\alpha)\longmapsto \lambda\alpha$$

满足如下规律：

A1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

A2) $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$

A3) $\exists\ \theta\in V$ s.t. $\alpha+\theta=\alpha=\theta+\alpha$

A4) $\forall\alpha\in V$，$\exists\ \beta\in V$ s.t. $\alpha+\beta=\theta=\beta+\alpha$ 称 $\beta$ 为 $\alpha$ 的负元素 记为 $-\alpha$. 定义减法 $\gamma-\alpha := \gamma+(-\alpha)$.

D1) $\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$

D2) $(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$

M1) $\lambda(\mu\alpha)=(\lambda\mu)\alpha$

M2) $1\cdot\alpha=\alpha$

④ 则称 $V$ 为 $F$ 上的线性空间. $V$ 中元素称为向量